Aula 6

ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

META

Introduzir aos alunos conceitos básicos das ondas eletromagnéticas: como elas são produzidas, quais são suas características físicas, e como descrever matematicamente sua propagação. Apresentar as principais características das ondas eletromagnéticas harmônicas.
Discutir o transporte de energia e momento por ondas eletromagnéticas, e definir intensidade da onda.

OBJETIVOS

Ao final desta aula, o aluno deverá:
Entender o que é onda eletromagnética é como ela é produzida.
Entender as propriedades gerais das ondas eletromagnéticas.
Descrever matematicamente a propagação das ondas eletromagnéticas harmônicas.
Entender como a energia e o momento são transportados pela onda eletromagnética, e qual é o significado da intensidade.

PRÉ-REQUISITO

Trigonometria básica; cálculo diferencial básico; vetores; eletromagnetismo básico.

Introdução

Uma das mais importantes descobertas do século 19 foi a descoberta das ondas eletromagnéticas. A primeira previsão teórica da existência dessas ondas foi feita, em 1864, pelo físico escocês, James Clerk Maxwell. Ele reuniu os conhecimentos existentes e descobriu as correlações que havia em alguns fenômenos, dando origem à teoria de que eletricidade, magnetismo e óptica são de fato manifestações diferentes do mesmo fenômeno físico. Maxwell conseguiu provar teoricamente que uma perturbação eletromagnética devia se propagar no vácuo com uma velocidade igual à da luz, ou seja, 300.000 km/s. A primeira verificação experimental foi feita por Henrich Hertz, em 1887 quando ele produziu ondas eletromagnéticas por meio de circuitos oscilantes e, depois, os detectou por meio de outros circuitos sintonizados na mesma frequência. Seu trabalho foi homenageado posteriormente colocando-se o nome "hertz" para unidade de frequência.

A importância das ondas eletromagnéticas na nossa vida é indiscutível. Elas estão presentes quando enxergamos os objetos a nossa volta, quando ligamos a TV, quando estouramos pipocas no forno de microondas e em mais uma grande gama de exemplos.

6.1 Equações de Maxwell e origem das ondas eletromagnéticas

Por centenas de anos filósofos e cientistas questionaram sobre a natureza da luz. Isaac Newton (1642-1727) acreditava que a luz consistia de um feixe de partículas, enquanto o físico holandês Christian Huygens (1629-1695) assumia que a luz era um tipo de movimento ondulatório. A disputa sobre a natureza e comportamento da luz foi finalmente resolvida pelos trabalhos do físico inglês James Clerk Maxwell (1831-1879) (figura 6.1). Maxwell mostrou que todas as propriedades conhecidas da luz poderiam ser explicadas através de quatro equações, conhecidas como as equações de Maxwell. Ele provou que a luz visível, assim como outras formas de radiação, tal como a luz ultravioleta e as ondas de rádios, são ondas formadas por campos elétrico e magnético, denominadas ondas eletromagnéticas, que se propagam no espaço.

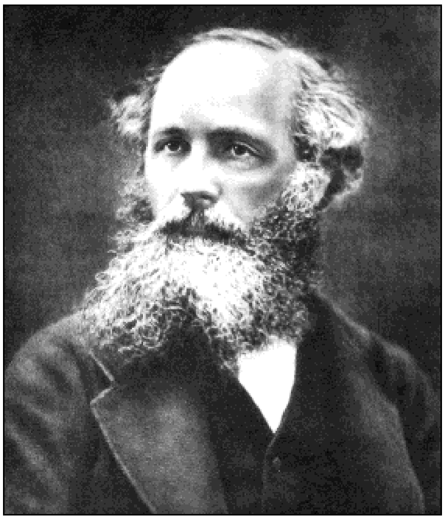


Figura 6.1: James Clerk Maxwell (1831-1879).

Você já aprendeu que todos os fenômenos mecânicos podem ser descritos em termos de somente três famosas leis de Newton. Similarmente, todos os fenômenos da eletricidade e magnetismo podem ser analisados em termos de somente cinco equações: quatro delas são denominadas como equações de Maxwell, e uma é a equação que descreve a força de Lorentz. Abaixo listaremos e discutiremos brevemente essas equações no vácuo, com objetivo de usá-las para explicar como as ondas eletromagnéticas podem ser criadas e como se propagam pelo espaço.

A primeira equação de Maxwell não é nada mais do que a generalização da lei de Gauss,

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{6.1}$$

que diz o seguinte: o fluxo do campo elétrico $\vec{E}$ através de <u>qualquer</u> superfície <u>fechada</u> S é igual a razão entre a carga elétrica confinada dentro da superfície e a permissividade de vácuo ε_0. Essa equação permite a existência de um monopólo elétrico, i.e., a existência separada de cargas positivas e negativas.

A segunda equação de Maxwell é a lei de Gauss para o magnetismo,

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \tag{6.2}$$

e diz seguinte: qualquer que seja superfície fechada S escolhida, e qualquer que seja conteúdo dentro do volume cercado por essa superfície (distribuição de cargas) – o fluxo de campo magnético $\vec{B}$ através dessa superfície será zero. Isso significa que o número de linhas do campo magnético que entra e sai do volume é sempre igual, i.e., os monopólos magnéticos não podem existir.

Terceira lei de Maxwell é a lei de indução de Faraday,

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{6.3}$$

com a seguinte interpretação: a integral de linha do campo elétrico $\vec{E}$ em torno de qualquer trajetória fechada (chamada força eletromotora) é igual a taxa de variação de fluxo magnético $\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$ através de qualquer superfície limitada por esta trajetória. Preste atenção, Φ_B não é zero pela segunda lei de Maxwell porque a superfície pela qual a integral é feita não é uma superfície fechada. A conclusão mais importante que segue da terceira equação do Maxwell é que **o campo magnético variável cria o campo elétrico**! Veja, se o $\vec{B}$ não depender do tempo, então a taxa de variação de fluxo magnético será zero (lado direito de (6.3)) e o campo elétrico ao longo da trajetória l não existirá!

Quarta equação de Maxwell expressa lei de Ampère generalizado,

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \tag{6.4}$$

onde μ_0 é permeabilidade do vácuo. A conclusão mais importante que pode ser tirada dessa equação é que **a corrente elétrica I, ou um campo elétrico variável, criam um campo magnético**. Se a taxa do fluxo elétrico $\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{S}$ não for zero, ou $I \neq 0$, então o $\vec{B}$ no lado esquerdo da equação (6.4) também não será zero.

Finalmente, a força de Lorentz:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \tag{6.5}$$

é uma força que os campos elétrico e magnético exercem sobre uma carga pontual q.

As quatro equações de Maxwell permitem analisar a inter-relação entre o movimento de cargas e a criação de correspondentes campos elétricos e magnéticos. Com uma análise desse tipo chega-se às seguintes conclusões:

- Carga em repouso cria o $\vec{E}$ estático (que não varia com tempo) e não produz $\vec{B}$.
- Carga em movimento uniforme produz $\vec{E}$ e $\vec{B}$ estáticos.
- Carga em movimento acelerado produz $\vec{E}$ e $\vec{B}$ que variam com tempo.

Vamos analisar com mais detalhes o último caso. Imagine uma carga que oscila para cima e para baixo em um circuito elétrico. Essa carga exerce movimento acelerado e, portanto, produz um campo elétrico $\vec{E}$ variável. Esse campo elétrico será capaz de gerar um campo magnético, em acordo com a quarta equação de Maxwell (6.4), que por sua vez, também é variável. Esse campo magnético variável será capaz de gerar outro campo elétrico em acordo com a terceira equação de Maxwell (6.3), e esse novo campo elétrico irá criar outro campo magnético e, assim, sucessivamente. A sucessão de campos magnéticos e elétricos que “alimentam” um ao outro, formará uma **perturbação eletromagnética,** que irá se propagar pelo espaço de forma autônoma e independente da fonte que o criou, sem precisar qualquer meio material para esta propagação!

As características da propagação dessa perturbação podem ser determinadas através das equações de Maxwell. Para satisfazer as primeiras duas (6.1) e (6.2), mostra-se que **os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ devem ser perpendiculares entre si, e ao mesmo tempo ambos têm que ser perpendiculares em relação à direção de propagação da perturbação**. Também se mostra que as equações (6.3) e (6.4) determinam a relação entre as magnitudes dos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$:

de (6.3) segue: $E = c \cdot B$, (6.7)
de (6.4) segue: $B = \varepsilon_0 \mu_0 c E$, (6.8)

onde c é a velocidade de propagação da perturbação. Para que ambas as equações sejam satisfeitas simultaneamente, essa velocidade tem que assumir o valor:

$$c = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0 c} \quad \text{i.e.,} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \tag{6.9}$$

Sabendo que $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\, C^2/Nm^2$ e $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\, N/A^2$, o cálculo de c resulta em: $c = 3{,}00 \cdot 10^8\, m/s$, que é exatamente a velocidade de propagação da luz no vácuo. Portanto, concluímos que **uma perturbação eletromagnética propaga-se através do espaço com a velocidade igual à velocidade de luz**. Essa conta, feita pela primeira vez no século XIX, foi primeira indicação clara que a luz tem natureza eletromagnética.

Se assumirmos que a perturbação eletromagnética se propaga ao longo de eixo x, então campo elétrico será direcionado ao longo de eixo y e campo magnético ao longo do eixo z. Os campos mudam durante a propagação, portanto dependem de x e t:

$$\vec{E}(x,t) = E(x,t) \cdot \vec{e}_y$$
$$\vec{B}(x,t) = B(x,t) \cdot \vec{e}_z$$

Mostra-se, a partir das equações de Maxwell (6.3) e (6.4), que os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ que compõem a perturbação satisfazem seguintes equações diferenciais:

$$\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial t^2} \tag{6.10}$$

Reconhecemos imediatamente que as equações (6.7) exibem a forma da equação geral de onda:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Com isso, finalmente podemos afirmar que a perturbação eletromagnética descrita acima se propaga através do espaço **como uma onda**, com velocidade $v = 1\big/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = c$, que é o resultado consistente com (6.9). O nome dessa onda, que reflete sua natureza física, é simplesmente **onda eletromagnética**.

Como consequência do fato de que os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sejam determinados pelas equações diferenciais lineares (6.10), a onda eletromagnética obedece ao princípio de superposição. Isso pode ser facilmente deduzido. Se $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$ forem soluções da equação (6.10), sua combinação linear $c_1\vec{E}_1 + c_2\vec{E}_2$ também será solução da mesma. O mesmo vale para o campo magnético $\vec{B}$. Portanto, somando duas ondas eletromagnéticas, cria-se uma nova onda eletromagnética cujos campos são a soma dos campos das ondas individuais. Em outras palavras, as ondas eletromagnéticas obedecem ao princípio de superposição, que permite a possibilidade de ocorrerem vários fenômenos ondulatórios, como interferência e difração, por exemplo.

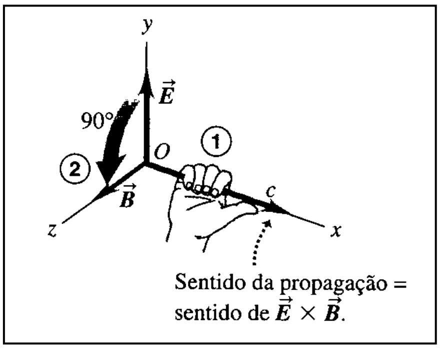
Todo conhecimento sobre as ondas eletromagnéticas que adquirimos até agora, foi adquirido teoricamente, somente analisando as equações do Maxwell. As propriedades discutidas são completamente gerais e aplicam-se para qualquer tipo de onda eletromagnética. As principais conclusões tiradas a partir desta análise são reunidas abaixo.

1. A origem das ondas eletromagnéticas é eletromagnética. Qualquer carga elétrica em movimento acelerado irradia (cria) ondas eletromagnéticas.
2. Ondas eletromagnéticas são ondas transversais. O que oscila nelas não são partículas do meio, como no caso das ondas mecânicas, mas os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Os últimos são perpendiculares mutuamente, e também em relação à direção de propagação. A onda se propaga na direção e sentido determinados pelo vetor $\vec{E} \times \vec{B}$.
3. A razão entre os módulos (magnitudes) dos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ é constante: $E = c \cdot B$. Isso significa que esses campos sempre oscilam em fase: quando $E = 0$, necessariamente $B = 0$; quando E exibe valor máximo, o mesmo acontece com B.
4. Ondas eletromagnéticas se deslocam no vácuo com velocidade constante, igual à velocidade da luz.
5. Não se precisa nenhum meio material para que as ondas eletromagnéticas se propagem.
6. Ondas eletromagnéticas obedecem ao princípio de superposição.

6.2 Descrição matemática das ondas eletromagnéticas

A descrição matemática das ondas eletromagnéticas é muito similar a descrição matemática das ondas mecânicas. No caso das ondas mecânicas, suas características foram definidas em relação à função de deslocamento das partículas do meio ao longo da trajetória ondulatória $y(x,t)$. As características das ondas eletromagnéticas, por outro lado, são definidas em relação à mudança do campo elétrico ao longo da trajetória $\vec{E}(x,t)$, exatamente da mesma maneira feita no caso das ondas mecânicas.

- O **comprimento de onda** λ de uma onda eletromagnética é a distância entre dois pontos consecutivos nos quais o vetor $\vec{E}$ (ou $\vec{B}$) tem mesmo módulo e mesmo sentido. Simplesmente, λ é distância entre dois máximos ou mínimos consecutivos da onda.
- O **período** T da onda eletromagnética é o intervalo de tempo necessário para a onda caminhar uma distância que corresponde a um comprimento de onda. Como a velocidade de propagação é c, vale: $c = \lambda/T$.
- A **frequência** f de uma onda eletromagnética é o inverso do período. Ela representa o número de períodos existentes em unidade de tempo: $f = 1/T$. Levando em conta a definição do período, a relação entre f e λ é: $c = f \cdot \lambda$, exatamente a mesma como no caso das ondas mecânicas.
- Sob a **amplitude** de uma onda eletromagnética, usualmente se considera a amplitude do seu campo elétrico $\vec{E}$.
- A **direção** e o **sentido** de propagação de uma onda eletromagnética são determinados pelo vetor $\vec{E} \times \vec{B}$, i.e., pela regra da mão direita, iniciando do vetor $\vec{E}$ e terminando no vetor $\vec{B}$ (veja figura do lado).



- A **polarização** de uma onda eletromagnética é uma propriedade conectada com o plano em que o campo elétrico $\vec{E}$ oscila. Por enquanto, nós vamos considerar somente ondas **linearmente polarizadas**. Estas são ondas cujo campo elétrico sempre oscila em um único plano que não muda durante a propagação. Na ilustração acima o campo elétrico oscila no plano XY.

A frente de uma onda eletromagnética pode assumir várias formas, dependendo do tipo da fonte que a produz ou das propriedades do meio de propagação (onda esférica, cilíndrica...). Aqui nós vamos discutir somente as ondas eletromagnéticas mais simples, que são **ondas planas**. Estas são ondas cujas frentes são planos. Neles, as direções dos campos magnéticos e elétricos estão, em qualquer ponto, perpendiculares à direção de propagação. Ondas não planas podem ser aproximadas por ondas planas nas regiões muito distantes da fonte, como já foi mencionado na Aula 02.

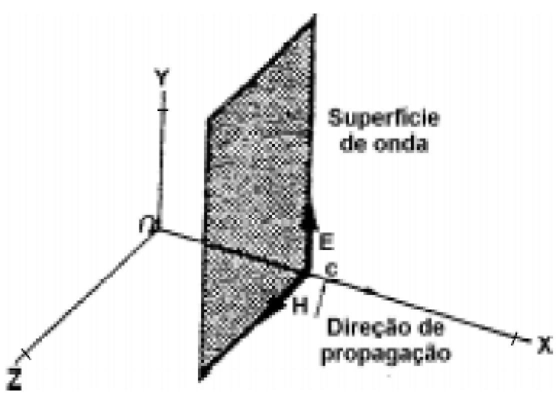


Figura 6.2: Uma onda plana que se propaga ao longo de eixo x. Em cada ponto num plano determinado, os valores de E e B são iguais.

6.3 Ondas eletromagnéticas harmônicas

A solução mais simples das equações da onda (6.10) descreve uma onda harmônica, no qual os campos E e B oscilam de acordo com funções seno ou cosseno. Esse tipo de onda exibe o mesmo papel das ondas harmônicas mecânicas: qualquer onda eletromagnética não harmônica pode ser representada em termos de superposição das ondas harmônicas (teorema de Fourier). No caso das ondas harmônicas eletromagnéticas, porém, temos que levar em conta natureza vetorial dos campos que as compõem.

Vamos supor que uma onda plana harmônica se propaga ao longo de eixo x, no sentido positivo (x crescente). Neste caso, campo elétrico oscila ao longo de eixo y, e campo magnético ao longo de eixo z. Mas, como vetor $\vec{E}\times\vec{B}$ tem que apontar sempre para o sentido de propagação, quando E fica no lado positivo de eixo y ($E>0$), o B também precisa estar no lado positivo do eixo z ($B>0$), e vice-versa, $E<0$ implica $B<0$ (figura 6.3).

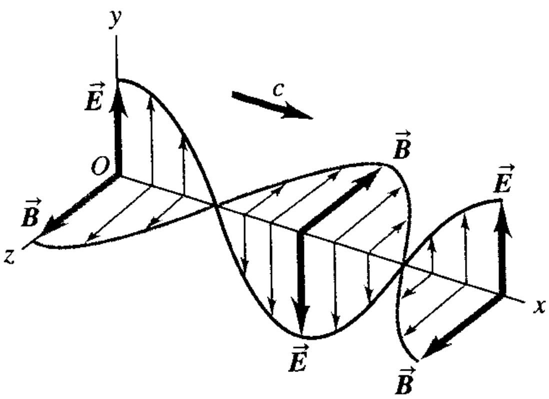


Figura 6.3: Ilustração de uma onda harmônica que se propaga ao longo de eixo x, no sentido positivo. Campos elétricos e magnéticos oscilam senoidalmente nos planos XY e XZ, respectivamente.

As equações que descrevem a variação dos campos nesse caso são as seguintes:

$$\vec{E}(x,t) = E_{\max}\cdot\vec{e}_y\cdot\text{sen}(\omega t - kx)$$
$$\vec{B}(x,t) = B_{\max}\cdot\vec{e}_z\cdot\text{sen}(\omega t - kx) \qquad (6.11)$$

Note que as fórmulas refletem o fato de que os dois campos estão sempre em fase (diferença de fase é zero). Elas descrevem uma onda plana, linearmente polarizada com plano de polarização XY (pois nesse plano o E oscila) e com direção de propagação: $\vec{E}\times\vec{B}\,\square\,\vec{e}_y\times\vec{e}_z=+\vec{e}_x$. Os $E_{\max}$ e $B_{\max}$ são amplitudes dos campos elétricos e magnéticos, respectivamente. A interpretação de ω e k é a mesma como no caso das ondas mecânicas: ω é a frequência angular ($\omega = 2\pi f$), e k é o número de onda ($k = 2\pi/\lambda$).

Caso onda harmônica se propagasse ao longo de eixo x, mas no sentido negativo, a descrição matemática mudaria um pouquinho. Para que o vetor $\vec{E}\times\vec{B}$ sempre aponte para direção $-\vec{e}_x$, quando E permanecer no lado positivo do eixo y ($E>0$) o B precisa estar no lado negativo do eixo z ($B<0$), e vice-versa; $E<0$ implica $B>0$ (figura 6.4).

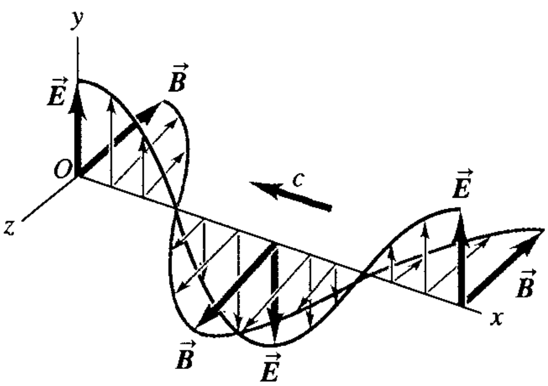


Figura 6.4: Ilustração de uma onda harmônica que se propaga ao longo do eixo x, no sentido negativo.

As equações que descrevem a variação dos campos nesse caso são:

$$\vec{E}(x,t) = E_{\max}\cdot\vec{e}_y\cdot\mathrm{sen}(\omega t - kx)$$
$$\vec{B}(x,t) = -B_{\max}\cdot\vec{e}_z\cdot\mathrm{sen}(\omega t - kx) \qquad (6.12)$$

pois $\vec{E}\times\vec{B} \propto \vec{e}_y\times(-\vec{e}_z) = -\vec{e}_x$, que é a direção de propagação certa.

6.4 Energia e momento transportados pela onda eletromagnética; intensidade

Como qualquer outra onda, a onda eletromagnética também transporta energia e momento através do espaço. Este fenômeno é de grande importância e tem sido usado em diferentes aplicações tecnológicas, como no transporte de informações e de energia de um ponto para o outro. O Sol, em particular, é uma grande fonte de ondas eletromagnéticas e sua importância é indiscutível em nosso dia-a-dia. Devido ao fato que estas ondas transportam energia, a superfície do nosso planeta é quente e pode acomodar a vida.

Para descrever matematicamente esse transporte, notaremos que qualquer região do espaço onde existem os campos elétricos e magnéticos contém certa quantidade de **densidade de energia** igual a:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2 \qquad (6.13)$$

(essa fórmula vem do curso do eletromagnetismo). Quando uma onda eletromagnética passa por esta região, sabemos exatamente qual é a relação entre seus campos elétricos e magnéticos: $E = c\cdot B$. Colocando esse resultado em (6.13), junto com a expressão (6.9), segue:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}\varepsilon_0\mu_0 E^2 \quad \Rightarrow \quad u = \varepsilon_0 E^2 \tag{6.14}$$

A equação (6.14) expressa a densidade de energia (energia por unidade de volume) de uma onda eletromagnética no vácuo. Como o campo elétrico varia com a posição e o tempo, $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r},t)$, o mesmo vale para a densidade de energia também, $u = u(\vec{r},t)$.

O transporte dessa quantia de energia usualmente é descrito em termos de fluxo da energia por unidade de tempo e por unidade de área perpendicular à direção de propagação. Vamos analisar a passagem de uma onda eletromagnética através de uma superfície perpendicular com área A (veja figura 6.5).

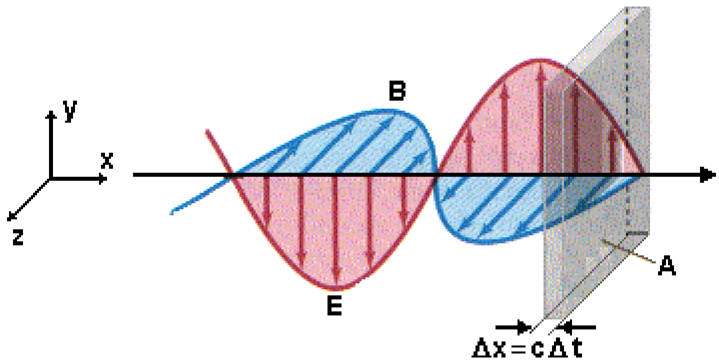


Figura 6.5: Onda eletromagnética atravessando uma área A.

Vamos ainda supor que no instante $t = 0$ a frente de onda formava um plano determinado, e que depois do intervalo de tempo dt a frente da onda progrediu para o plano seguinte, na distância $dx = c \cdot dt$ a partir do primeiro. O volume dV entre esses dois planos contém a energia eletromagnética dU:

$$dU = u \cdot dV = \varepsilon_0 E^2 \cdot A c\, dt$$

Essa energia é transportada através da área A. O fluxo dela, por unidade de área e tempo é dado por:

$$S = \frac{dU}{A \cdot dt} = \varepsilon_0 c\, E^2$$

Usando as relações (6.7) e (6.9), podemos transformar a última expressão:

$$S = \varepsilon_0 c\, E \cdot c\, B = \varepsilon_0 c^2\, EB = \varepsilon_0 \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} EB$$

e chegar a fórmula final:

$$S = \frac{E\,B}{\mu_0} \text{, com dimensão } \left[\frac{J}{s \cdot m^2}\right] \tag{6.15}$$

Esse resultado pode ser facilmente generalizado para incluir ainda mais informações sobre o transporte de energia. Podemos definir uma grandeza vetorial que descreve o módulo, direção e sentido do fluxo de energia transportada por ondas eletromagnéticas:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} \qquad (6.16)$$

O vetor $\vec{S}$ denomina-se como **vetor de Poynting**, e foi introduzido pelo físico inglês John Poynting (1852-1914). Ele fornece a direção e sentido da propagação de onda (através de $\vec{E}\times\vec{B}$) e, consequentemente, direção e sentido do fluxo da energia. Além disso, como $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são perpendiculares, o módulo do vetor $\vec{S}$ é igual a EB/μ_0, que é a magnitude de fluxo da energia por unidade de tempo e da área perpendicular, de acordo com a equação (6.15).

Para medir e avaliar a taxa de transferência de energia em uma onda eletromagnética (saber quanto ela é energética), porém, o vetor de Poynting não tem muita utilidade prática. Isso porque os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ variam muito rápido com tempo, é, portanto o $\vec{S}$ também. As frequências de oscilação dos campos são da ordem de $5\cdot10^{14}$ Hz para a luz visível, por exemplo, e não existe nenhuma instrumentação que pode registrar eventos tão rápidos. O que nós realmente medimos e percebemos é o **valor médio** da taxa com a qual a energia atinge a instrumentação (ou nossos olhos). Por esta razão, introduz-se uma nova quantidade física que leva em conta esta realidade. Ela se chama **intensidade** I, e é definida como média temporal do vetor de Poynting:

$$I = \langle S(\vec{r},t)\rangle_t \qquad (6.17)$$

As unidades de medida da intensidade são as mesmas que se usa para descrever o vetor de Poynting: joule por segundo e metro quadrado ($J/(s\cdot m^2)$), i.e., watt por metro quadrado (W/m^2).

Para calcular a intensidade de uma onda eletromagnética, precisamos saber como os campos elétricos e magnéticos variam com a posição e com o tempo. Portanto, faremos isso no caso das ondas harmônicas, para os quais isso é conhecido (fórmulas (6.11) ou (6.12)). Como I é uma quantidade escalar e não negativa, não precisamos nos preocupar com sinais dos campos:

$$S(x,t) = \frac{E(x,t)\,B(x,t)}{\mu_0} = \frac{E_{\max}B_{\max}}{\mu_0}\cdot\mathrm{sen}^2(\omega t - kx)$$

onde as formas de E e B foram substituídas das fórmulas (6.11). Agora podemos transformar o quadrado do seno utilizando a identidade trigonométrica $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2\alpha$. Com isso, a equação acima fica:

$$S(x,t) = \frac{E_{\max}B_{\max}}{2\mu_0}\cdot\left[1-\cos\{2(\omega t - kx)\}\right]$$

A intensidade da onda harmônica é o valor médio dessa expressão: $I = \langle S(x,t)\rangle_t$. Segue:

$$\left\langle 1-\cos\{2(\omega t-kx)\}\right\rangle = 1-\left\langle \cos\{2(\omega t-kx)\}\right\rangle = 1-0 = 1$$

pois a média temporal das funções cosseno e seno é sempre zero (metade do tempo essas funções são positivas e na outra metade negativas). Com isso, o resultado final é:

$$I = \frac{E_{\max}\cdot B_{\max}}{2\mu_0} \qquad (6.18)$$

A partir da relação geral (6.7): $E = c\cdot B$, no caso das ondas harmônicas, segue a relação entre amplitudes dos campos:

$$E_{\max} = c\cdot B_{\max} \qquad (6.19)$$

Levando em conta essa relação, bem como a relação $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$, a equação (6.18) pode ser transformada em diversas fórmulas:

$$I = \frac{E_{\max}\cdot B_{\max}}{2\mu_0} = \frac{E_{\max}^2}{2\mu_0 c} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_{\max}^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_{\max}^2 \qquad (6.20)$$

Qualquer uma das fórmulas (6.20) descreve a intensidade de uma onda eletromagnética harmônica propagando-se pelo vácuo. Quanto maior for a intensidade de uma onda, maior é a energia transportada por ela.

Além da energia, uma onda eletromagnética também transfere momento linear p. O último é uma propriedade do campo e não é associado com a existência de nenhuma massa. Isso significa que **as ondas eletromagnéticas podem exercer pressão sobre uma superfície** na hora da incidência. Na discussão seguinte vamos assumir que a superfície seja perpendicular à direção de propagação, e que a onda transfere para a superfície uma energia total U durante o intervalo de tempo t. Caso a superfície absorvesse toda energia no dado intervalo, Maxwell mostrou que o momento total p transferido tem magnitude:

$$p = \frac{U}{c} \qquad \text{(absorção completa)} \qquad (6.21)$$

A pressão P_{rad} exercida sobre a superfície é igual à força F dividida pela área da superfície A. Se combinarmos essa expressão com a segunda lei de Newton $F = dp/dt$, obtém-se:

$$P_{rad} = \frac{F}{A} = \frac{1}{A}\frac{dp}{dt}$$

Substituindo p da equação (6.21), temos:

$$P_{rad} = \frac{1}{A}\frac{d}{dt}\left(\frac{U}{c}\right) = \frac{1}{c}\frac{dU/dt}{A}$$

Nessa fórmula reconhecemos a expressão $(dU/dt)/A$ como a energia da onda transferida na unidade de tempo e por unidade da área perpendicular, que é a magnitude do vetor de Poynting S. Como já foi dito anteriormente, o efeito da transferência pode ser registrado somente em média temporal. Portanto, pressão da radiação sobre a superfície perfeitamente absorvente é igual a:

$$P_{rad} = \frac{\langle S \rangle}{c} \equiv \frac{I}{c} \qquad (6.22)$$

Se a superfície tivesse a propriedade de refletir completamente a onda incidente normal (como espelho, por exemplo), o momento p transferido para superfície num intervalo dt seria duas vezes maior do que no caso da superfície absorvedora. O momento transferido da onda incidente seria $p = U/c$, e da onda refletida também $p = U/c$ (pois a variação do momento é $p-(-p) = 2p$). Portanto, o momento total transferido seria:

$$p = \frac{2U}{c} \quad \text{(reflexão completa)} \qquad (6.23)$$

Essa transferência resultaria em uma pressão de radiação duas vezes mais elevada do que no caso da superfície absorvedora:

$$P_{rad} = \frac{2\langle S \rangle}{c} \equiv \frac{2I}{c} \qquad (6.24)$$

Pressão da radiação exercida sobre a superfície que não é nem refletora nem absorvedora perfeita, e na qual a onda eletromagnética incide sob um ângulo qualquer, encontra-se entre os valores extremos descritos pelas equações (6.22) e (6.24).

A pressão de radiação é usualmente extremamente pequena. Para se ter uma idéia, a intensidade de luz solar direta, antes de entrar na atmosfera da Terra, é aproximadamente igual a 1,4 kW/m^2. Isso corresponde a uma pressão sob superfície totalmente absorvedora de:

$$P_{rad} = \frac{I}{c} = \frac{1{,}4 \cdot 10^3\, W/m^2}{3{,}0 \cdot 10^8\, m/s} = 4{,}7 \cdot 10^{-6}\, Pa$$

que é aproximadamente 10^{-10} atmosferas. Embora essa pressão seja muito pequena, ela pode ser medida com instrumentos suficientemente sensíveis.

A Agência Espacial Norte-Americana (NASA) explora seriamente as possibilidades de lançar naves espaciais para outros planetas utilizando como "combustível" a pressão da radiação solar. Trata-se de um conceito de "velejamento" solar, que não está somente no

domínio da ficção científica. No ano 1973, engenheiros da NASA já se aproveitaram da pressão solar que atingia painéis solares da nave Mariner 10, e efetuaram pequenas correções da sua trajetória quando ele passava perto de Marte.

Bibliografia consultada

Alonso, M. S. e Finn, E. J., *Física*, Ed. Edgard Blucher Editora, São Paulo, 1999.

Young, H. D. e Freedman, R. A. *Física III - Eletromagnetismo*, Pearson Education do Brasil (qualquer edição).

Halliday, D., Resnick, R, Walker, J *Fundamentos de Física - Eletromagnetismo,* Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. (qualquer edição).

Questões

1. Qual é a origem da radiação eletromagnética? Como ela é produzida?

2. Um fio conectado aos terminais de uma bateria emite ondas eletromagnéticas ou não? Explique.

3. Descreva o significado físico do vetor de Poynting.

4. Liste o maior número de semelhanças e diferenças entre ondas sonoras e ondas luminosas que você puder.

5. Quando a luz (ou outra forma da radiação eletromagnética) atravessa uma determinada região, o que é que se move?

Exercícios

-- Ondas eletromagnéticas

1. (a) A distância até a estrela polar do Hemisfério Norte, Polaris, é de aproximadamente $6,44\times10^{18}$ m. Se Polaris se apagasse hoje, em qual ano nós a veríamos desaparecer? (b) Quanto tempo leva para a luz solar atingir a Terra? (c) Quanto tempo leva para um sinal de microondas de radar propagar-se da Terra até a Lua e voltar? (d) Quanto tempo leva para uma onda de rádio dar uma volta na Terra em um grande círculo próximo à superfície do planeta? (e) Quanto tempo leva para a luz de um raio atingir você se ele caiu a 10,0 km de onde você se encontra?

<u>Resposta</u>

(a) Sabemos que a velocidade da luz que vem da Polaris é de $c = 3 \cdot 10^8\, m/s$, e a distância Polaris-Terra é $d = 6,44 \cdot 10^{18}\, m$. Portanto, o tempo que a luz da Polaris precisa para chegar aos nossos olhos é: $t_P = d/c = 2{,}1467 \cdot 10^{10}\, s$. Como um ano tem 365 dias, um dia tem 24 horas e uma hora tem 3600 segundos, podemos calcular quantos segundos tem um ano: 1 ano = $365 \cdot 24 \cdot 3600 = 3{,}1536 \cdot 10^7\, s$. Se dividirmos o tempo t_P por este número, obteremos o t_P expresso em anos, em vez de segundos:

$$t_P = \frac{2{,}1467 \cdot 10^{10}\, s}{3{,}1536 \cdot 10^7\, s}\,\text{anos} = 0,680 \cdot 10^3\ \text{anos} = 680\ \text{anos}$$

Portanto, para que a luz da Polaris chegasse à Terra, precisaria de 680 anos. Se o apagamento da Polaris acontecesse hoje, nós o veríamos somente no ano 2780 (2010 (ano atual) + 680 = 2780). Na verdade nós nem veríamos este evento, pois não estaríamos vivos naquele ano.

(b) A distância média entre a Terra e o Sol é $d \approx 1,496 \cdot 10^{11}\, m$. Portanto, para que a luz solar chegue aos nossos olhos, precisa de:

$$t_S = \frac{d}{c} = \frac{1,496 \cdot 10^{11}\, m}{3 \cdot 10^8\, m/s} = 0,499 \cdot 10^3\, s = 499\, s = \frac{499}{60}\,\text{min} = 8,3\,\text{min}$$

i.e., 8 minutos e 20 segundos.

(c) A distância média entre a Terra e a Lua é $d \approx 3,84 \cdot 10^8\, m$. A distância Terra-Lua-Terra é percorrida pelas microondas pelo tempo:

$$t_L = \frac{2 \cdot d}{c} = \frac{2 \cdot 3,84 \cdot 10^8\, m}{3 \cdot 10^8\, m/s} = 2,56\, s$$

(d) O comprimento do grande círculo em volta da Terra é aproximadamente igual $d = 40\,000\,\text{km}$. Portanto, uma onda de rádio levará

$$t_R = \frac{d}{c} = \frac{4 \cdot 10^7\, m}{3 \cdot 10^8\, m/s} = 0{,}13\, s$$

(e) Como $d = 10\,\text{km} = 10^3\, m$, você verá a luz do raio depois de

$$t = \frac{d}{c} = \frac{10^3\, m}{3 \cdot 10^8\, m/s} = 0,34 \cdot 10^{-5}\, s$$

i.e., praticamente instantaneamente.

2. A velocidade de uma onda eletromagnética propagando-se através de uma substância transparente não magnética é $v = 1\Big/\sqrt{\kappa\varepsilon_0\mu_0}$, onde κ é a constante dielétrica da substância. Determine a velocidade da luz na água, que tem uma constante dielétrica em frequências ópticas de 1,78.

3. Uma onda eletromagnética no vácuo tem uma amplitude de campo elétrico de 220 V/m. Calcule a amplitude do campo magnético correspondente.

4. Em unidades SI, o campo elétrico em uma onda eletromagnética é descrito por:

$$E_y = 100 \cdot \mathrm{sen}(1,00 \times 10^7 x - \omega t)$$

Encontre (a) a amplitude das oscilações do campo magnético correspondente, (b) o comprimento de onda λ e (c) a frequência f .

Resposta

(a) Usando a fórmula (6.19): $B_{\max} = \dfrac{E_{\max}}{c} = \dfrac{100\ V/m}{3 \cdot 10^8\ m/s} = 33,34 \cdot 10^{-8}\ \dfrac{Vs}{m} = 33,34T$ (Tesla).

(b) Como $k = 1,00 \cdot 10^7\ m^{-1}$, segue: $\lambda = \dfrac{2\pi}{k} = \dfrac{2 \cdot 3,14}{10^7} m = 6,28 \cdot 10^{-7}\ m$.

(c) $f = \dfrac{c}{\lambda} = \dfrac{3 \cdot 10^8\ m/s}{6,28 \cdot 10^{-7}\ m} = 0,48 \cdot 10^{-7}\ s^{-1}$.

-- Transporte da energia pelas ondas eletromagnéticas

5. Quanta energia eletromagnética por metro cúbico está contida na luz solar, se a intensidade da luz solar na superfície da Terra sob um céu razoavelmente claro é 1000 W/m^2?

Resposta

A densidade de energia eletromagnética é: $u = \varepsilon_0 E^2$, pela fórmula (6.14). Assumindo que $E = E_{\max} \cdot \sin(kx - \omega t)$ segue: $u = \varepsilon_0 E_{\max}^2 \cdot \sin^2(kx - \omega t)$. O valor médio de u é: $\langle u \rangle = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E_{\max}^2$, pois $\langle \sin(kx - \omega t) \rangle = \dfrac{1}{2}$, como foi comentado no texto acima. Agora, a intensidade da onda é igual a: $I = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 c E_{\max}^2$ pela fórmula (6.20). Se nesta fórmula substituímos $\dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E_{\max}^2$ pela $\langle u \rangle$, obteremos: $I = c \cdot \langle u \rangle$. Portanto, a resposta do exercício é: $\langle u \rangle = \dfrac{I}{c} = \dfrac{1000\ W/m^2}{3 \cdot 10^8\ m/s} = 333,34 \cdot 10^{-8}\ \dfrac{J}{m^3}$.

6. Qual é a magnitude média de um vetor de Poynting a 5,00 milhas de um transmissor de rádio transmitindo isotropicamente com uma potência média de 250 kW?

Resposta

Quando se diz que a transmissão é isotrópica, isso significa que a onda eletromagnética se propaga da mesma maneira em todas as direções do espaço. Neste caso, a frente de onda forma uma superfície esférica. Portanto, a potência da onda a uma distância $r = 5,00 \text{ milhas} = 5,00 \cdot 1,61 \text{ km} = 8,05 \text{ km}$ a partir da fonte é distribuída sobre a área de superfície de uma esfera com raio r. Como a intensidade de onda é definida como potência por unidade de área, e a magnitude média do vetor de Poynting é igual a intensidade (fórmula (6.17)), segue:

$$\langle S \rangle = I = \frac{\langle P \rangle}{4\pi r^2} \frac{W}{m^2} \quad \text{i.e.,} \quad \langle S \rangle = \frac{250 \cdot 10^3 \, W}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,05 \cdot 10^3 \, m^2} = 2,473 \, \frac{W}{m^2}$$

7. Uma comunidade planeja construir uma instalação para converter radiação solar em energia elétrica. Ela necessita de 1,00 MW de potência e o sistema a ser instalado tem uma eficiência de 30,0% (ou seja, 30,0% da energia solar incidente sobre a superfície são convertidos em energia elétrica). Qual deve ser a área efetiva de uma superfície absorvedora perfeita usada em uma instalação como essa, supondo-se uma intensidade constante de 1000 W/m^2?

Resposta

$\langle P \rangle = [0,3 \cdot I] \cdot A$, onde A é área da superfície absorvedora. Portanto,

$$A = \frac{\langle P \rangle}{0,3 \cdot I} = \frac{1,00 \cdot 10^6 \, W}{0,3 \cdot 10^3 \, W/m^2} = 3333,34 \, m^2$$

8. Em uma região de vácuo os campos elétrico e magnético num instante de tempo são $\vec{E} = (80,0\vec{i} + 32,0\vec{j} - 64,0\vec{k})$ N/C e $\vec{B} = (0,200\vec{i} + 0,080\vec{j} + 0,290\vec{k})$ μT. (a) Mostre que os dois campos são perpendiculares entre si. (b) Determine o vetor de Poynting para esses campos.

Dica

(a) Mostrar que o produto escalar $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$

(b) Ache o produto vetorial $\vec{E} \times \vec{B}$ e divida o com μ_0 (fórmula (6.16)).

9. A que distância de uma fonte pontual de onda eletromagnética de 100 W temos $E_{\max} = 15$ V/m?

Dica

Por um lado temos que: $I = \dfrac{\langle P \rangle}{4\pi r^2}$, onde $\langle P \rangle = 100\,W$, e por outro: $I = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 c\, E_{\max}^2$, onde $E_{\max} = 15\,V/m$. Combine estas duas fórmulas, e determine a distância r .

-- Momento e pressão de radiação

10. Uma onda eletromagnética plana de intensidade de 6,00 W/m^2 atinge um pequeno espelho de bolso com 40,0 cm^2 de área, posicionado perpendicularmente à onda que se aproxima. (a) Qual momento a onda transfere para o espelho a cada segundo? (b) Encontre a força que a onda exerce sobre o espelho.

Resposta

Assumindo que o espelho é um refletor ideal (reflete totalmente), o momento transferido para ele em cada segundo pode ser calculado a partir da fórmula: $P_{rad} = \dfrac{2I}{c}$. Como $P_{rad} = \dfrac{F}{A}$, segue: $F = \dfrac{\Delta p}{\Delta t} = \dfrac{2I}{c} A$, i.e., $\Delta p = \dfrac{2I}{c} A \cdot \Delta t$, onde $\Delta t = 1,0\,s$. Substituindo os valores numéricos:

$$\Delta p = \frac{2 \cdot 6,00\;W/m^2}{3 \cdot 10^8\;m/s} \cdot 40,0 \cdot 10^{-2}\;m^2 \cdot 1,00\,s = 1,6 \cdot 10^{-8}\;\frac{J \cdot s}{m}$$

11. Uma onda de rádio transmite 25,0 W/m^2 de potência por unidade de área. Uma superfície plana de área A é perpendicular à direção de propagação da onda. Calcule a pressão de radiação sobre a superfície se ela for um absorvedor perfeito.

Dica

$P_{rad} = \dfrac{I}{c}$, onde $I = 25,0\,\dfrac{W}{m^2}$.

12. Um possível meio de vôo espacial é colocar uma placa aluminizada perfeitamente refletora em órbita ao redor da Terra e, então, usar a luz do Sol para empurrar essa "vela solar". Suponha que uma vela de área de $6,00 \times 10^5$ m^2 e massa de 6000 kg seja colocada em órbita voltada para o Sol. (a) Qual força é exercida sobre a vela? (b) Qual é a aceleração da vela? (c) Quanto tempo a vela leva para chegar à Lua, a $3,84 \times 10^8$ m de distância? Despreze todos os efeitos gravitacionais, suponha que a aceleração calculada no item (b) permaneça constante e suponha uma intensidade solar de 1340 W/m^2.

Resposta

(a) $F = \frac{2I}{c} \cdot A = \frac{2 \cdot 1340\, W/m^2}{3 \cdot 10^8\ m/s} \cdot 6,00 \cdot 10^5\ m^2 = 5,36\ N$.

(b) $a = \frac{F}{m} = \frac{5,36\ N}{6000\ kg} = 8,9 \cdot 10^{-4}\ \frac{m}{s^2}$.

(c) Como $a = const$, a distância s percorrida pelo tempo t é calculada a partir da fórmula: $s = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + s_0$, onde v_0 é velocidade inicial (em $t = 0\, s$) e s_0 posição inicial (em $t = 0\, s$). Assumindo que $s_0 = 0$ (origem de nosso sistema de coordenadas é colocado na superfície da Terra), e $v_0 = 0$ (a vela começou se locomover a partir de repouso), segue:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3,84 \cdot 10^8\ m}{8,9 \cdot 10^{-4}\ m/s^2}} = 0,9289 \cdot 10^6\ s = \frac{0,9289 \cdot 10^6\ s}{24 \cdot 60 \cdot 60\ s/dia} = 10,75\ dias$$

Resumo da aula

Chama-se onda eletromagnética um conjunto de campos elétricos e magnéticos propagando-se pelo espaço. Esses campos oscilam em fase, são perpendiculares entre si, e, ao mesmo tempo, perpendiculares em relação à direção de propagação da onda. As ondas eletromagnéticas não precisam um meio para se propagar, e se propagam com velocidade igual a velocidade da luz. São produzidas por cargas elétricas aceleradas ou desaceleradas.

Ondas eletromagnéticas são descritas em termos de amplitude dos campos elétricos e magnéticos, da frequência e período de oscilação desses campos, de comprimento de onda, direção de propagação e polarização. Sua descrição matemática é muito parecida com aquela usada para ondas mecânicas, com exceção do fato de que a função de onda mecânica descreve a perturbação das partículas do meio, enquanto a função de onda eletromagnética descreve a perturbação de campos elétricos e magnéticos no espaço e tempo.

Em uma onda eletromagnética harmônica, os campos elétricos e magnéticos variam de acordo com as funções seno e cosseno. No caso da propagação ao longo de eixo x , no sentido de x crescente:

$$\vec{E}(x,t) = E_{\max} \cdot \vec{e}_y \cdot \mathrm{sen}(\omega t - kx)$$
$$\vec{B}(x,t) = B_{\max} \cdot \vec{e}_z \cdot \mathrm{sen}(\omega t - kx)$$

i.e., em qualquer instante o vetor $\vec{E} \times \vec{B}$ determina a direção e sentido de propagação da onda.

Durante sua propagação, a onda eletromagnética transporta energia e momento linear. A quantidade física que descreve esse transporte é o vetor de Poynting:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

que fornece a direção e sentido da propagação da onda (através de $\vec{E} \times \vec{B}$) e cujo módulo é a magnitude do fluxo de energia por unidade de tempo e da área perpendicular à direção de propagação. O valor médio temporal do vetor de Poynting

$$I = \left\langle S(\vec{r}, t) \right\rangle_t$$

chama-se intensidade da onda eletromagnética. A intensidade descreve a quantidade da energia que passa por determinado ponto do espaço por unidade de tempo e a unidade da área perpendicular à direção de propagação. No caso das ondas harmônicas, a intensidade depende do quadrado da amplitude do campo elétrico:

$$I = \frac{E_{\max} \cdot B_{\max}}{2\mu_0} = \frac{E_{\max}^2}{2\mu_0 c} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_{\max}^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_{\max}^2$$

Através de transporte do momento linear as ondas eletromagnéticas podem exercer pressão sobre uma superfície na hora da incidência. A pressão exercida pela onda é:

$$P_{rad} = \frac{\left\langle S \right\rangle}{c} \equiv \frac{I}{c}$$

caso a superfície seja absorvedora da radiação, ou

$$P_{rad} = \frac{2I}{c}$$

caso a superfície seja refletora completa da radiação incidente.

Conclusão

Nessa aula começamos a estudar as ondas eletromagnéticas. Aprendemos qual é a sua natureza física (campos elétricos e magnéticos que vibram e se propagam pelo espaço), qual é a sua origem (cargas aceleradas e desaceleradas), e como podemos descrever seu movimento. Estas ondas, bem como as ondas mecânicas, não carregam matéria, mas transportam energia e momento linear através do espaço, com velocidade igual a velocidade da luz. Aprendemos como descrever matematicamente esse fato, expressando a intensidade de uma onda eletromagnética e a sua pressão em termos de quantidades físicas usadas para caracterizá-la: amplitude do campo elétrico e velocidade de propagação.

Informações sobre a próxima aula

Na próxima aula aprofundaremos o conhecimento sobre ondas eletromagnéticas. Classificaremos todos os tipos dessas ondas (ondas de rádio e TV, microondas, luz infravermelha, visível e ultravioleta, raios X e gama) pelas suas faixas de frequências, em um esquema chamado espectro eletromagnético. Definiremos as equações do efeito Doppler para ondas eletromagnéticas, e discutiremos a formação e descrição de ondas eletromagnéticas estacionárias.